Μαθημα 4ο 13/10/2016

Πιθανοτητες

S δειγμ. χωρος , $A \subseteq S$ τοτε $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|}$ } κλασικος ορισμος Πιθανοτητας

Παραδειγμα 1:
Ζαρι → 2 φορες

{ Το A, B θα εχει ιδια δομη με το S για $A, B \subseteq S$ }

A = {Το αθροισμα οψεων ισο με 7}

B = {Η απολυτη τιμη της διαφορας οψεων ιση με 4}

$S = \{(x,y): \underbrace{x,y = 1,2,\ldots,6}_{\text{Δυνατα αποτελεσματα ριψης}}\} \rightarrow \|S\| = 36$

$A = \{(x,y): x,y = 1,2,\ldots,6,\ x+y = 7\} = \{(6,1),(1,6),(2,5),(5,2),(4,3),(3,4)\}$. Αρα $\|A\| = 6$

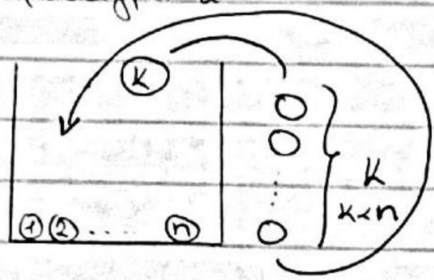
Συνεπως με βαση τον κλασικο ορισμο της πιθανοτητας εχουμε: $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$B = \{(x,y): x,y = 1,2,\ldots,6,\ |x-y| = 4\} = \{(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)\}$. Αρα $\|B\| = 4$

Συνεπως με βαση τον κλασικο ορισμο της πιθανοτητας εχουμε $P(B) = \dfrac{\|B\|}{\|S\|} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

{ Η διαταξη οριζεται οταν $n>k$ }

Παραδειγμα 2:



με επανατοποθετηση

Ποια η πιθανοτητα οι μπαλες να ειναι διαφορετικες αν ενδιαφερει η σειρα;

{ Καλο ειναι να ξεκιναμε πρωτα απο το S τον δειγματικο χωρο }

$$S \rightarrow \overbrace{\underset{n}{\underset{\uparrow}{O}}\ \underset{n}{\underset{\uparrow}{O}} \cdots \underset{n}{\underset{\uparrow}{O}}}^{k\text{-αδες}} \leftarrow \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k\text{-φορες}}$$

Μπορει να θεωρηθει συνθετη διαδικασια

Αρα $\|S\| = n^k$

$$A \rightarrow \underset{n}{\underset{\uparrow}{O}}\ \underset{n-1}{\underset{\uparrow}{O}}\ \underset{n-2}{\underset{\uparrow}{O}} \cdots \underset{n-k+1}{\underset{\uparrow}{O}} \leftarrow n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Αρα $\|A\| = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$

Οποτε εχουμε : $P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{n^k} = \frac{(n)_k}{n^k}$

Ισχυει οτι $(n)_k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2} \cdots (n-(k+1))\,\cancel{(n-k)}\,(n-(k-1)) \cdots n}{\cancel{1 \cdot 2} \cdots \cancel{(n-k)}} =$$

$= (n-k+1) \times \cdots \times n$

παραδειγμα 3

ζαρι → 6 φορες

α) Ποια η πιθανοτητα οι οψεις 2,4,6 εμφανιζονται δυο φορες η καθε μια

β) Ποια η πιθανοτητα το αποτελεσμα των ριψεων να ειναι διαφορετικο;

$S \rightarrow \underset{1^{η}}{\bigcirc}\ \underset{2^{ης}}{\bigcirc}\ \ldots\ \underset{6^{η}}{\bigcirc}$

$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_6),\ x_i = 1, \ldots, 6\ ,\ i = 1, 2, \ldots, 6\}$

Εφοσον καθε θεση γεμιζει με 6 τοτε

$$\|S\| = \underbrace{6 \times 6 \times \ldots \times 6}_{6-\text{φορες}} = 6^6$$

ⓐ $A \rightarrow \bigcirc\ \bigcirc\ \ldots\ \bigcirc$

22 44 66
44 22 66
24 42 66
66 44 22
26 46 42
⋮

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$$

Αρα η ζητουμενη πιθανοτητα ειναι $P(A) = \dfrac{\binom{6}{2,2,2}}{6^6}$

ⓑ
1 2 3 4 5 6
6 5 4 3 2 1
⋮

6! τροποι

Αρα η ζητουμενη πιθανοτητα ειναι $P(B) = \dfrac{6!}{6^6} = \dfrac{5!}{6^5}$

παραδειγμα 4:

52 καρτες τραπουλας

Ποια η πιθανοτητα η 36^{η} καρτα να ειναι "ασσος";

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{51!}{52!} \cdot 4$$

ποιον απο τους 4 "ασσους" βαζω στην 36^{η} θεση

παραδειγμα Προβλημα Γενεθλιων

Ετος → 365

Ποια η πιθανοτητα κ ατομα (κ < 365) να εχουν διαφορετικα γενεθλια;

$$\underline{1} \quad \underline{2} \quad \underline{3} \quad \ldots \quad \underline{365}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^{o\varsigma} \to 365 \\ 2^{o\varsigma} \to 365 \\ \vdots \\ \kappa^{o\varsigma} \to 365 \end{array}\right\} \|S\| = 365^{\kappa}$$

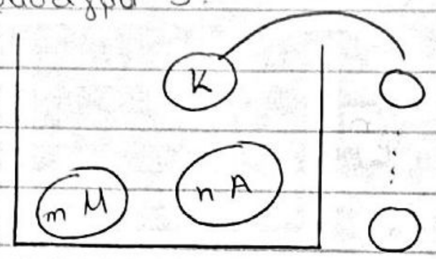
$$A = \begin{cases} 1^{o\varsigma} \to 365 \\ 2^{o\varsigma} \to 364 \\ \kappa^{o\varsigma} \to 365 - \kappa + 1 \end{cases}$$

Αρα $\|A\| = 365 \times 364 \times \ldots \times (365 - \kappa + 1) = (365)_{\kappa}$

Παρατηρηση

$$\frac{(n)_{\kappa}}{n^{\kappa}} \simeq \left(1 - \frac{\kappa}{2n}\right)^{\kappa - 1} \to \text{Stirling}$$

παραδειγμα 5:



Μ: Μαυρες μπαλες

Α: Ασπρες μπαλες

χωρις επανατοποθετηση

Ποια η πιθανοτητα το δειγμα των k-μπαλων να περιεχει r Μ και $(k-r)$ Α με $r \leq m$, $k-r \leq n$

ⓐ Το δειγμα ειναι μη διατεταγμενο (δεν ενδιαφερει η σειρα επιλογης μπαλων)

ⓑ Το δειγμα ειναι διατεταγμενο → με ενδιαφερει η σειρα

Λυση

Συνθετη διαδικασια επιλογης Μαυρων και Ασπρων

ⓐ $$P(A) = \frac{\binom{m}{r} \times \binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}$$

ⓑ $$P(A) = \frac{\binom{k}{r,\,k-r} (m)_r \times (n)_{k-r}}{(m+n)_k}$$

$$\left\{ \binom{k}{r} = \binom{k}{r,\,k-r} \right\}$$

Αν κανω πραξεις παρατηρω οτι

$$\underset{ⓐ}{P(A)} = \underset{ⓑ}{P(A)}$$

μου δημιουργεί σύνθετη διαδικασία

Παράδειγμα Πρόβλημα Demerec → Pascal

A: Ότι θα εμφανιστεί τουλάχιστον μια φορά η όψη ⚅ στη ρίψη ζαριού, 4 φορές

ή

B: ότι θα εμφανιστούν τουλάχιστον μια φορά εξάρες (⚅, ⚅) στη ρίψη 2 ζαριών 24 φορές

Ζητείται $P(A)$, $P(B)$?

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P\begin{pmatrix}\text{κανένα ⚅ στη} \\ \text{ρίψη ζαριού 4} \\ \text{φορές}\end{pmatrix} =$$

$$= 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0{,}518$$

$$\underset{1^{η}}{5} \times \underset{2^{η}}{5} \times \underset{3^{η}}{5} \times \underset{4^{η}}{5}$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P\begin{pmatrix}\text{καμία φορά "εξάρες"} \\ \text{στη ρίψη 2 ζαριών} \\ \text{24 φορές}\end{pmatrix} =$$

$$= 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0{,}491$$

$$\left.\frac{1^{η}}{36} \quad \cdots \quad \frac{24^{ης}}{36}\right\} \text{ άρα } \|S\| = 36^{24}$$

ο πολυωνυμικος συντελεστης μου τοποθετει

παραδειγμα 6

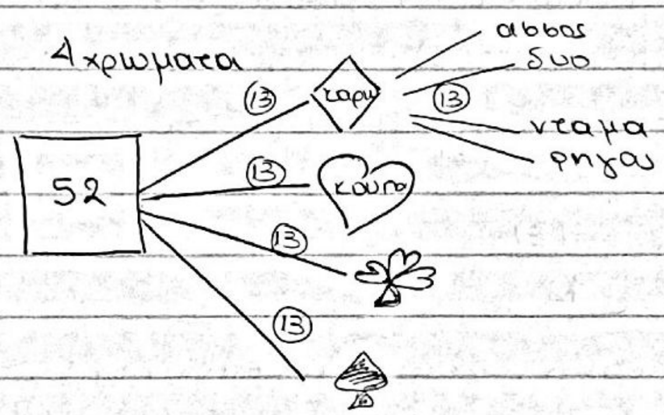
τραπουλα 52 → 5

πιθανοτητες

(α) Ενος χρωματος (και οι 5 καρτες ειναι ιδιου χρωματος, π.χ σπαθι, μπαστουνι κουπα, καρω)

(β) Ενος ζευγους (οι καρτες ειναι της μορφης α, α, β, γ, δ με α, β, γ, δ να παριστανουν ενα ειδος π.χ "ασσος", ..., "ρηγας")

(γ) Δυο ζευγων (της μορφης α, α, β, β, γ)



λυση

(α) $P(\text{χρωματος}) = \dfrac{\underbrace{\binom{4}{1}}_{=4} \times \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

4 → γιατι εχω να διαλεξω και απο 4 χρωματα

(β) $P(\text{ενος ζευγους}) = \dfrac{4 \times \binom{13}{4} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

→ για β → για γ → για δ

4 → ποιο απο τα 4 ειδη θα παρω γιατι εχω 4 χρωματα

(γ) $P(\text{δυο ζευγων}) = \dfrac{3 \times \binom{13}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

→ για το α → β → γ → δ

Εμπειρικος Ορισμος (Fisher ~ 1900)

Ριψη νομισματος N-φορες

	N	(n)κ αριθμοι κ στις N ριψεις	(n)κ/κ σχετικη συχνοτητα εμφανισης κ
Buffon	4040	2048	0,5080
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24.000	12012	0,5005

Ορισμος

Αν μια διαδικασια επαναληφθει κατω απο τις ιδιες συνθηκες N φορες και στην ακολουθια των N επαναληψεων εμφανισει n(E) φορες το ενδεχομενο E τοτε η πιθανοτητα του E οριζεται:

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\frac{n(E)}{N}}_{\text{σχετικη συχνοτητα εμφανισης του } E}$$

Ιδιοτητες

① $0 \leq P(E) \leq 1$

② $P(S) = 1$

③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ οπου $A \cap B = \emptyset$ δηλ ξενα μεταξυ τους

④ $P(A) = 1 - P(A^c)$